ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2021 Математика. Механика. Информатика Вып. 2 (53)

УДК 531.36

Дифференциальные уравнения начала движения упруго связанных инертных тел на примере поезда с упругими сцепками

И. П. Попов
Курганский государственный университет
Россия, 640002, г. Курган, ул. Томина, 106-52
ip.popow@yandex.ru; 8-905-85-28-121

Режим трогания для наземного транспортного средства является наиболее тяжелым. Эффективным способом трогания поезда является выбор зазоров в сцепках. При этом вагоны приводятся в движение последовательно и инертная масса, а также сила трения покоя непосредственно в момент трогания минимальны. Этот способ, однако, имеет два существенных недостатка – малую фиксированную величину зазоров в сцепках, что ограничивает эффективность способа и ударный характер передачи импульса, и это отрицательно сказывается на состоянии конструктивных элементов поезда. Указанных недостатков можно избежать, если использовать упруго деформируемые сцепки. Целью работы является построение математической модели "легкого" трогания поезда с упругими сцепками. Смягчение режима трогания состава по существу обусловливается заменой одновременного трогания секций на поочередное.

Ключевые слова: *ускорение; энергия; масса; секция; локомотив; вагон; колебания; демпфер.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-2-45-51

Сила трения покоя значительно превосходит силу трения движения. Это приводит к тому, что режим трогания для наземного транспортного средства является наиболее тяжелым. Для поездов этот режим представляет настолько серьезную проблему, что иногда приходится принимать специальные меры, такие как использование песка в зоне контакта бандажа колеса с рельсом или вспомогательного локомотива [1].

Эффективным способом трогания поезда является выбор зазоров в сцепках. При этом вагоны приводятся в движение последовательно и инертная масса, а также сила трения покоя непосредственно в момент трогания минимальны.

Этот способ, однако, имеет два существенных недостатка – малую фиксированную величину зазоров в сцепках, что ограничивает эффективность способа и ударный характер передачи импульса, а это, в свою очередь, отрицательно сказывается на состоянии конструктивных элементов поезда.

Указанных недостатков можно избежать, если использовать упруго деформируемые сцепки [2, 3].

Целью работы является построение математической модели "легкого" трогания поезда с упругими сцепками.

Расчет механической системы в составе массивных локомотива, вагонов и упругих сцепок является достаточно громоздким. Для его минимизации принимаются следующие допущения: сила F, развиваемая локомотивом, – величина постоянная; массы локомотива и вагонов равны между собой и составляют m.

Локомотив и один вагон

Уравнение сил, приложенных к локомотиву, имеет вид:

$$F = m\frac{d^2x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2)\,, \qquad (1)$$

где x_1, x_2 – перемещение, соответственно, локомотива и вагона, k – коэффициент упругости сцепки.

Силы, приложенные к вагону, удовлетворяют уравнению

$$0 = m\frac{d^2x_2}{dt^2} - k(x_1 - x_2).$$

Из последнего уравнения следует:

$$x_1 = \frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2. \qquad (2)$$

Подстановка этого выражения в (1) дает

$$F = \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + kx_2 - kx_2 =$$
$$= \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + 2m\frac{d^2x_2}{dt^2}. \qquad (3)$$

Пусть $$\frac{d^2x_2}{dt^2} = z. \qquad (4)$$

Тогда (3) запишется в виде

$$z'' + 2\frac{k}{m}z = \frac{kF}{m^2}. \qquad (5)$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\frac{k}{m} = 0.$$

Его корни равны

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{2\frac{k}{m}}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z_1 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t.$$

Частное решение в соответствии с (5) имеет вид $z_2 = A$.

Подстановка его в (5) дает

$$2\frac{k}{m}A = \frac{kF}{m^2},$$

Откуда $$A = \frac{F}{2m}.$$

Общее решение уравнения (5) находится как

$$z = z_1 + z_2 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}.$$

В момент времени $t = 0$ сцепка не деформирована, следовательно, на вагон сила не действует и величина (4) равна нулю. Поэтому для $t = 0$ последнее выражение примет вид

$$z(0) = 0 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + \frac{F}{2m},$$

откуда $$C_1 = -\frac{F}{2m}.$$

С учетом этого

$$z = -\frac{F}{2m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}. \qquad (6)$$

В соответствии с (4)

$$v_2 = \int z dt = -\frac{F}{2m}\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$
$$-C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}t + C_3,$$

$$x_2 = \int v_2 dt = \frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$
$$-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{4m}t^2 + C_3t + C_4. \qquad (7)$$

С учетом (2), (4), (6) и (7)

$$x_1 = -\frac{F}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2k} +$$
$$+\frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t +$$
$$+\frac{F}{4m}t^2 + C_3t + C_4,$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{F}{2k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t +$$
$$+C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$
$$-\frac{F}{4k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + +$$
$$+\frac{F}{2m}t + C_3,$$

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{F}{2k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$
$$-\frac{F}{4k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}.$$

$$x_2(0) = 0 = \frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0 -$$
$$-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + \frac{F}{4m}0^2 + C_3 0 + C_4,$$

$$\frac{F}{4k} + C_4 = 0, \; C_4 = -\frac{F}{4k}.$$

$$v_2(0)=0=-C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}+C_3,$$

$$v_1(0)=0=C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k}-C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}+C_3=$$

$$=C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}+C_3,$$

$$\begin{cases}-C_2\sqrt{\dfrac{m}{2k}}+C_3=0\\ C_2\sqrt{\dfrac{m}{2k}}+C_3=0\end{cases},\ C_2=0,\quad C_3=0.$$

Окончательное решение:

$$x_1=-\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2+\frac{F}{4k},$$

$$x_2=\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2-\frac{F}{4k},$$

$$v_1=\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m}t,$$

$$v_2=-\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m}t,$$

$$a_1=\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m},$$

$$a_2=-\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m}.$$

Характерный отрезок времени τ_2 (индекс "$_2$" означает количество составных частей поезда) для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки. При этом

$$a_1(\tau_2)-\frac{F}{2m}=0 \text{ или } \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\tau_2=0,$$

$$\sqrt{2\frac{k}{m}}\tau_2=\frac{\pi}{2},\ \tau_2=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

За время τ_2 локомотив пройдет расстояние

$$x_1(\tau_2)=-\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}+$$

$$+\frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k}+\frac{F}{4k}=\frac{F\pi^2}{32k}+\frac{F}{4k}$$

и разовьет скорость

$$v_1(\tau_2)=\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}+$$

$$+\frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}=\frac{F}{2\sqrt{2km}}+\frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}.$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого состава.

$$a=\frac{F}{2m},\ v=\frac{F}{2m}t,\ x=\frac{F}{4m}t^2,$$

$$x(\tau_2)=\frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k}=\frac{F\pi^2}{32k},$$

$$v(\tau_2)=\frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}=\frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}.$$

$$\frac{x_1(\tau_2)}{x(\tau_2)}=\frac{F\pi^2/(32k)+F/(4k)}{F\pi^2/(32k)}=1+\frac{32}{4\pi^2}\approx 1{,}81,$$

$$\frac{v_1(\tau_2)}{v(\tau_2)}=\frac{F/(2\sqrt{2km})+F\pi/(4\sqrt{2km})}{F\pi/(4\sqrt{2km})}=$$

$$=1+\frac{2}{\pi}\approx 1{,}64.$$

Отношение для кинетических энергий локомотива [4] составляет

$$\frac{E_1(\tau_2)}{E(\tau_2)}=2{,}69.$$

Полученные соотношения наглядно демонстрируют, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого.

Локомотив и два вагона

Уравнения сил, приложенных, соответственно, к локомотиву и вагонам, имеют вид:

$$F=m\frac{d^2x_1}{dt^2}+k(x_1-x_2),\qquad (8)$$

$$k(x_1-x_2)=m\frac{d^2x_2}{dt^2}+k(x_2-x_3),\qquad (9)$$

$$k(x_2-x_3)=m\frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Из последнего уравнения следует:

$$x_2=\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+x_3.\qquad (10)$$

Производная этого выражения равна

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Подстановка последних двух выражений в (9) дает

$$x_1=\frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2}+2x_2-x_3=$$

$$=\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+2\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+2x_3-x_3=$$

$$=\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+x_3. \qquad (11)$$

Производная этого выражения равна

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{m^2}{k^2}\frac{d^6x_3}{dt^6}+3\frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Подстановка полученных выражений в (8) дает

$$\frac{F}{k}=\frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6}+3\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+$$

$$+\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+x_3-\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}-x_3=$$

$$=\frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6}+4\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2},$$

$$\frac{d^6x_3}{dt^6}+4\frac{k}{m}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{k^2}{m^2}\frac{d^2x_3}{dt^2}=\frac{k^2F}{m^3}. \qquad (12)$$

Пусть $$\frac{d^2x_3}{dt^2}=z. \qquad (13)$$

Тогда (12) запишется в виде

$$z''''+4\frac{k}{m}z''+3\frac{k^2}{m^2}z=\frac{k^2F}{m^3}. \qquad (14)$$

Характеристическое уравнение

$$r^4+4\frac{k}{m}r^2+3\frac{k^2}{m^2}=0.$$

$$r_{1,2}^2=-2\frac{k}{m}\pm\frac{k}{m}=,\ r_1^2=-3\frac{k}{m},\ r_2^2=-\frac{k}{m},$$

$$r_{1,2}=\pm i\sqrt{3\frac{k}{m}},\ r_{3,4}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z_1=C_1\cos\sqrt{3\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{3\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Частное решение имеет вид $z_2=A$.

Подстановка его в (14) дает

$$3\frac{k^2}{m^2}A=\frac{k^2F}{m^3},\ A=\frac{F}{3m}.$$

Общее решение находится как

$$z=z_1+z_2=C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}. \qquad (15)$$

В соответствии с (13)

$$v_3=\int zdt=C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t-C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5, \qquad (16)$$

$$x_3=\int v_3dt=-C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-$$

$$-C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t-C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+$$

$$+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6. \qquad (17)$$

С учетом (10), (13), (15) и (17)

$$x_2=\frac{m}{k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{m}{k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+\frac{m}{k}C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{m}{k}C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{m}{k}\frac{F}{3m}-$$

$$-C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-$$

$$-C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t-$$

$$-C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6=$$

$$=\frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+\frac{F}{3k}+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6, \qquad (18)$$

$$v_2=\frac{dx_2}{dt}=-\frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+\frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5, \qquad (19)$$

$$a_2=\frac{dv_2}{dt}=-2C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-2C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}. \qquad (20)$$

С учетом (11), (20), (18) и (17)

$$x_1=-2C_1\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-2C_2\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}\frac{m}{k}+$$

$$+2\frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+2\frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2F}{3k}$$

$$+\frac{2F}{6m}t^2 + +2C_5 t + 2C_6 + C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t +$$

$$+C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t +$$

$$+C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{F}{6m}t^2 - C_5 t - C_6 =$$

$$= -C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$

$$+C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t +$$

$$+\frac{F}{k} + \frac{F}{6m}t^2 + C_5 t + C_6,$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t -$$

$$-C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5. \tag{21}$$

$$a_1 = C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}.$$

В соответствии с (20)

$$a_2(0) = -2C_1 + \frac{F}{3m} = 0, \quad C_1 = \frac{F}{6m}.$$

В соответствии с (15)

$$z(0) = 0 = \frac{F}{6m} + C_3 + \frac{F}{3m}, \quad C_3 = -\frac{F}{2m}.$$

В соответствии с (18)

$$x_2(0) = \frac{2m}{3k}C_1 + \frac{F}{3k} + C_6 = 0,$$

$$\frac{F}{9k} + \frac{F}{3k} + C_6 = 0, \quad C_6 = -\frac{4F}{9k}.$$

В соответствии с (21), (16) и (19)

$$v_1(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} + C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0,$$

$$v_3(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} - C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0, \quad C_4 = 0,$$

$$v_2(0) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2 + C_5 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_5 = 0.$$

Окончательное решение:

$$x_1 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + \frac{5F}{9k},$$

$$x_2 = \frac{F}{9k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{F}{9k},$$

$$x_3 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{4F}{9k},$$

$$v_1 = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t,$$

$$v_2 = -\frac{F}{3\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t,$$

$$v_3 = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t,$$

$$a_1 = \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m},$$

$$a_2 = -\frac{F}{3m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m},$$

$$a_3 = \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}.$$

Характерный отрезок времени τ_3 для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки.

При этом

$$a_1(\tau_3) - \frac{F}{3m} = 0$$

или $$\frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\tau_3 + \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0,$$

$$\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 + \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0.$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0{,}427\pi, \quad \tau_3 = 0{,}427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

За время τ_3 локомотив пройдет расстояние

$$x_1(\tau_3) = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot 0{,}427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} -$$

$$-\frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0{,}427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} +$$

$$+\frac{F}{6m}\left(0{,}427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 + \frac{5F}{9k} =$$

$$= \frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0{,}427\pi -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cos 0{,}427\pi + \frac{1}{6}\left(0{,}427\pi\right)^2 + \frac{5}{9}\right] =$$

$$= \frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0{,}427\pi - \frac{1}{2}\cos 0{,}427\pi +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left(0{,}427\pi\right)^2 + \frac{5}{9}\right] = 0{,}78\frac{F}{k}$$

и разовьет скорость

$$v_1(\tau_3) = \frac{F}{6\sqrt{3km}} \sin\sqrt{\frac{3k}{m}} \cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} +$$

$$+\frac{F}{2\sqrt{km}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{F}{3m} 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} =$$

$$= \frac{F}{\sqrt{km}}\left(\frac{1}{6\sqrt{3}} \sin\sqrt{3} \cdot 0,427\pi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sin 0,427\pi + \frac{1}{3} 0,427\pi\right) = \frac{F}{\sqrt{km}}.$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого состава:

$$a = \frac{F}{3m},\ v = \frac{F}{3m}t,\ x = \frac{F}{6m}t^2,$$

$$x(\tau_3) = \frac{F}{6m}\left(0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = 0,3\frac{F}{k},$$

$$v(\tau_3) = \frac{F}{3m} \cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,45\frac{F}{\sqrt{mk}}.$$

$$\frac{x_1(\tau_3)}{x(\tau_3)} = 2,6,$$

$$\frac{v_1(\tau_3)}{v(\tau_3)} = 2,22.$$

Отношение для кинетических энергий локомотива составляет

$$\frac{E_1(\tau_3)}{E(\tau_3)} = 4,93.$$

Заключение

Применение упруго деформируемых сцепок решает проблему трогания тяжелого поезда.

В таблицу сведены перемещения, скорости и кинетические энергии локомотива для моментов максимального растяжения упругой сцепки, отнесенные к соответствующим параметрам недеформируемого состава.

Приведенные перемещения, скорости и кинетические энергии локомотива

Количество секций поезда	$\frac{x_1(\tau)}{x(\tau)}$	$\frac{v_1(\tau)}{v(\tau)}$	$\frac{E_1(\tau)}{E(\tau)}$
2	1,81	1,64	2,69
3	2,6	2,22	4,93

Полученные соотношения наглядно демонстрируют, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого. При этом, чем больше число вагонов, тем больше преимущество первого над вторым.

Смягчение режима трогания состава по существу обусловливается заменой одновременного трогания секций на поочередное. Выше этот процесс описан для инерционных сил. Применительно к силе трения покоя механизм будет подобным, т.е. преодолевается не вся сила трения покоя одновременно, а поочередно преодолеваются ее малые части.

Полученные выражения для перемещений, скоростей и ускорений локомотива и вагонов имеют гармонические составляющие [5–7]. Для исключения продольных колебаний [8–10] состава после достижения максимального растяжения сцепки следует механически блокировать возможность ее гармонического сжатия с последующей выборкой упругой деформации, например, с использованием демпфирующих устройств.

Список литературы

1. *Попов И.П.* Инертно-емкостной накопитель энергии для маневрового тепловоза // Мир транспорта. 2019. Т. 17, № 3. С. 82–87. https://doi.org/10.30932/1992-3252-2019-17-3-82-87.
2. *Попов И.П.* Механические аналоги реактивной мощности // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2015. № 3(30). С. 37–39.
3. *Попов И.П.* Условно-ортогональные механические мощности // Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России. 2019. № 4(144). С. 15–17.
4. *Попов И.П.* О мерах механического движения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. № 3(26). С. 13–15.
5. *Попов И.П.* Комплексные представления для расчета механических систем при гармонических процессах // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. № 3(50). С. 66–78. DOI: 10.17072/1993-0550-2020-3-66–78.
6. *Попов И.П.* Мультиинертный осциллятор // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020.

№ 1(48). С. 60–64. DOI: 10.17072/1993-0550-2020-1-60-64.

7. *Popov I.P.* Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76. Iss. 4. P. 393–395. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.005
8. *Popov I.P.* Application of the Symbolic (Complex) Method to Study Near-Resonance Phenomena, Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2020, Vol. 49, № 12. P. 1053–1063. DOI: 10.3103/S1052618820120122.
9. *Попов И.П.* Резонансы сил и скоростей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. № 4(47). С. 62–66. DOI: 10.17072/1993-0550-2019-4-62-66.
10. *Попов И.П.* Вынужденные колебания механических систем в установившемся режиме // Машиностроение. 2019. № 4(61). С. 13–19.

Differential equations of the start of motion of elasticly coupled inert bodies on the example of a train with elastic couplings

I. P. Popov
Kurgan State University; 106-52, Tomina st., Kurgan, 640002, Russia
ip.popow@yandex.ru; 8-905-85-28-121

The starting mode for a ground vehicle is the most difficult. An effective way to pull off a train is to select coupling clearances. In this case, the cars are set in motion consequently, and the inert mass, as well as the static friction force immediately at the moment of starting, are minimal. This method, however, has two significant drawbacks – a small fixed value of the gaps in the couplings, which limits the effectiveness of the method and the shock nature of the impulse transmission, which negatively affects the state of the structural elements of the train. These disadvantages can be avoided by using elastically deformable couplings. The aim of this work is to construct a mathematical model of "easy" starting of a train with elastic couplings. The softening of the starting mode of the train is essentially due to the replacement of the simultaneous starting of the sections with alternate ones.

Keywords: *acceleration; energy; mass; section; locomotive; carriage; vibrations; damper.*