

УДК 004.8:519.86/.87

## Исследование математической модели воспитания группы роботов

**Н. В. Ощепкова**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
Россия, 614990, г. Пермь, Букирева, 15  
nvo@psu.ru; 8-342-239-63-09

Сформулированы теоремы, описывающие свойства воспитания группы роботов-цифровых двойников, вводятся коэффициенты групповой памяти роботов и исследуются свойства этих коэффициентов. Показано, что при большом количестве тактов непрерывного воспитания равномерно забывчивых роботов с равноценными эмоциями группа также будет обладать свойствами равномерной забывчивости.

**Ключевые слова:** робот; цифровой двойник; память; воспитание; группы роботов.

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-1-39-43

### Введение

В настоящее время активно разрабатывается теория эмоциональных роботов [1], связанная с созданием цифровых двойников человека и основанная на моделировании эмоций человека [2]. Однако, на наш взгляд, исследованию психологического поведения групп роботов уделено недостаточно внимания.

Одним из немногочисленных примеров, посвященных решению этой задачи, являются работы [3–7]. В этих работах впервые введены понятия группового воспитания роботов и групповой памяти цифровых двойников.

Пусть  $n$  – количество роботов в группе,  $j$  – порядковый номер робота в этой группе,  $j = 1, n$ ,  $\theta_{j,i}$  – коэффициент памяти робота к моменту воздействия на него сюжетом с порядковым номером  $i$ ,  $\theta_{j,i} \in (0, 1 - \delta_j]$ ,  $0 < \delta_j < 1$ ,  $\delta_j = const$ ,  $r_{j,i}$  – элементарное воспитание робота  $j$ ,  $R_{j,i}$  – суммарное воспитание робота, полученное им в результате воздействия на него общего количества сюжетов.

В работах [3, 4] показано, что воспитание группы удовлетворяет соотношению

$$\bar{R}_i = \bar{r}_i + \bar{\theta}_i \bar{R}_{i-1}, \quad (1)$$

где 
$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{j=1}^n R_{j,i}}{n}, \quad \bar{r}_i = \frac{\sum_{j=1}^n r_{j,i}}{n},$$

$$\bar{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^n \theta_{j,i} R_{j,i-1}}{\sum_{j=1}^n R_{j,i-1}}. \quad (2)$$

Очевидно, что коэффициент групповой памяти роботов при  $r_{j,i} > 0$  удовлетворяет соотношению

$$\bar{\theta}_i \in (0, 1 - \delta], \quad 0 < \delta < 1, \quad \delta = const.$$

### Теоремы о групповом воспитании роботов

Сформулируем несколько теорем.

#### Теорема 1

Если  $\bar{r}_i > 0$ ,  $i = 1, \infty$ ,

$$\bar{\theta}_i \in (0, 1 - \delta], \quad 0 < \delta < 1, \quad \delta = const,$$

то последовательность  $\bar{R}_i$  сходится.

*Доказательство*

Нетрудно видеть, что равенство (1), описывающее групповое воспитание роботов, полностью эквивалентно соотношению для воспитания индивидуальных роботов, приведенному в монографии [5]. Поэтому *доказательство* теоремы 1 полностью *совпадает с доказательством теоремы 2.5*, приведенной в работе [5].

**Теорема 2**

Если  $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\theta}_i = \bar{\theta} < 1$ ,  $\bar{r}_i > 0$ ,  $i = 1, \infty$ ,

то существует предел  $\bar{r}_i$  при  $i \rightarrow \infty$ .

*Доказательство*

В силу теоремы 1 справедливо равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{R}_i = z < \infty.$$

Переходя к пределу при  $i \rightarrow \infty$  с учетом условия теоремы 2 о том, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\theta}_i = \bar{\theta} < 1$ , получим цепочку равенств

$$z = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{R}_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{r}_i + \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\theta}_i \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{R}_{i-1} = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{r}_i + \bar{\theta} z,$$

которая влечет соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{r}_i = \left(1 - \bar{\theta}\right) z < \infty.$$

Таким образом, *теорема 2 доказана*.

**Свойства памяти группы роботов**

Пусть верны соотношения  $\theta_{j,i} = \theta_j$ ,  $r_{j,i} = q_j > 0$ .

Согласно работе [3] для группы, состоящей из равномерно забывчивых роботов с равноценными эмоциями [4], справедлива формула

$$\bar{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j q_j \frac{1 - \theta_j^{i-1}}{1 - \theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \frac{1 - \theta_j^{i-1}}{1 - \theta_j}}. \quad (3)$$

С учетом соотношения (3) очевидна цепочка равенств

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\theta}_i &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j q_j \frac{1 - \theta_j^{i-1}}{1 - \theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \frac{1 - \theta_j^{i-1}}{1 - \theta_j}} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j q_j \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1 - \theta_j^{i-1}}{1 - \theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1 - \theta_j^{i-1}}{1 - \theta_j}} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j q_j \frac{1}{1 - \theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \frac{1}{1 - \theta_j}} = \bar{\theta} < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что для равномерно забывчивых роботов с равноценными эмоциями коэффициент групповой памяти имеет предел.

Поставим следующую задачу:

– определить среднее значение коэффициента памяти  $\Theta_m$  группы роботов за  $m$  актов.

Очевидно, что для решения этой задачи необходимо найти величину  $\theta_m$ , являющуюся решением задачи:

найти 
$$\min_{\Theta_m} \sum_{i=1}^m \left( \Theta_m - \bar{\theta}_i \right)^2.$$

Легко показать, что  $\Theta_m$  удовлетворяет соотношению

$$\Theta_m = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i}{m},$$

которое с учетом формулы (3) можно записать в развернутом виде:

$$\Theta_m = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j q_j \frac{1 - \theta_j^{i-1}}{1 - \theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \frac{1 - \theta_j^{i-1}}{1 - \theta_j}}}{m}. \quad (4)$$

В силу положительности элементарных воспитаний равномерно забывчивых роботов группы очевидна цепочка соотношений:

$$\bar{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}} < \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}} = \sum_{j=1}^n \theta_j. \quad (5)$$

Подставляя формулу (5) в равенство (4), получим:

$$\Theta_m < \frac{m \sum_{j=1}^n \theta_j}{m} = \sum_{j=1}^n \theta_j. \quad (6)$$

Найдем предел:

$$\Theta_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \Theta_m.$$

Отметим, что  $\Theta_\infty$  является решением следующей задачи:

найти 
$$\min_{\Theta_\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \Theta_\infty - \bar{\theta}_i \right)^2. \quad (7)$$

Легко видеть, что решение задачи (7) удовлетворяет соотношению

$$\Theta_\infty = \frac{\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i}{\lim_{m \rightarrow \infty} m}. \quad (8)$$

В силу справедливости неравенства (6) верна формула

$$\Theta_\infty \leq \sum_{j=1}^n \theta_j.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\theta}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}. \quad (9)$$

Очевидно, что общий член ряда (9) удовлетворяет соотношениям:

$$\bar{\theta}_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\theta}_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}} = \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j q_j \frac{1}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \frac{1}{1-\theta_j}} \neq 0$$

Полученное соотношение показывает, что с течением времени группа роботов становится равномерно забывчивой, кроме того, ряд (9)

расходится, а так как все члены  $\bar{\theta}_i$  ряда положительны, то справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\theta}_i = \infty.$$

Пусть  $q_j = q = const, \quad j = \overline{1, \infty}$ .

В этом случае соотношение (4) примет вид

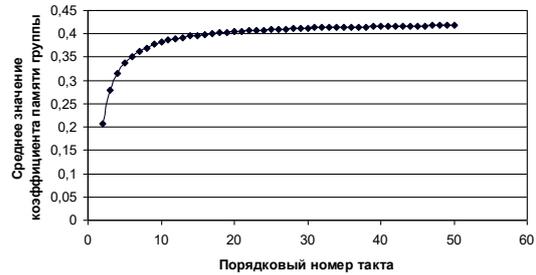
$$\Theta_m = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}}{m}. \quad (10)$$

### Модели равномерной забывчивости группы роботов

Для того чтобы описать качественное поведение среднего коэффициента памяти  $\Theta_m$ , соответствующего формуле (10), построим график при следующих параметрах:

$$n = 2, \theta_1 = 0.5, \theta_2 = 0.33, m = 1,50.$$

Для выполнения численного эксперимента была разработана компьютерная программа, результаты работы которой приведены на рисунке.



Изменение среднего значения коэффициента памяти группы роботов

Рисунок наглядно демонстрирует, что с увеличением количества тактов средний коэффициент памяти робота приближается к константе. Поэтому при большом количестве тактов в качестве коэффициента групповой памяти робота можно принимать эту константу, а, значит, считать группу роботов равномерно забывчивой. В этом случае при большом значении  $m$  справедлива формула  $\Theta_m \approx \Theta = const$ , а, значит, можно считать, начиная с некоторого большого номера такта  $I$ , верным соотношение

$$\bar{R}_i \approx r + \Theta \bar{R}_{i-1}, \quad (11)$$

где  $i = \overline{I, \infty}$ .

Согласно соотношению (11) воспитание  $\bar{R}_i$  группы равномерно забывчивых роботов с равноценными эмоциями будет описываться приближенно равенством  $\bar{R}_i = r \frac{1-\Theta^i}{1-\Theta}$ , где

$r = \sum_{j=1}^n q_j$ , а предельное воспитание группы

$\bar{R}_\infty$  можно приближенно найти по формуле

$$\bar{R}_\infty \approx \frac{r}{1-\Theta} = \frac{\sum_{j=1}^n q_j}{1 - \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n q_j \theta_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}},$$

где  $m > I$ .

При этом

$$\bar{R}_i \approx r \frac{1-\Theta^i}{1-\Theta} = \sum_{j=1}^n q_j \frac{\left( \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n q_j \theta_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}} \right)^i}{1 - \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n q_j \theta_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^n q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}}$$

Таким образом, на основе численного эксперимента показано, что для равномерно забывчивых роботов в группе с равноценными эмоциями каждого робота при большом количестве тактов можно считать группу роботов равномерно забывчивой и поэтому, если группа роботов воспитывается с помощью медиа-проектов, аналогично работе [7] параметр "надоело"  $\alpha_N$  для полного воспитательного цикла с порядковым номером  $N$  примет вид

$$\alpha_N \approx \sum_{i=1}^n q_i \Theta^{m_N} + \Theta^{m_{N-1}} (\Theta - 1) F_{m_{N-1}, k_{N-1}}, \quad (12)$$

где  $F_{m_1, k_1} \approx \sum_{i=1}^n q_i \Theta^{k_1} \frac{1-\Theta^{m_1}}{1-\Theta}$ ,

$$F_{m_{N-1}, k_{N-1}} \approx \Theta^{k_{N-1}} \left( \sum_{i=1}^n q_i \frac{1-\Theta^{m_{N-1}}}{1-\Theta} + \Theta^{m_{N-1}} F_{m_{N-2}, k_{N-2}} \right),$$

$$F_{m_0, m_0} = 0.$$

Аналогично работе [7] параметр "соскучился" можно написать в следующем виде:

$$\beta_N \approx \Theta^{k_N} (1-\Theta) \left( \sum_{i=1}^n q_i \frac{1-\Theta^{m_N}}{1-\Theta} + \Theta^{m_N} F_{m_{N-2}, k_{N-2}} \right). \quad (13)$$

В итоге величина интереса  $\Delta_N$  группы роботов к медиа-проекту определится формулой

$$\Delta_N \approx \frac{\beta_N}{\alpha_N} = \frac{\Theta^{k_N} (1-\Theta) \left( \sum_{i=1}^n q_i \frac{1-\Theta^{m_N}}{1-\Theta} + \Theta^{m_N} F_{m_{N-2}, k_{N-2}} \right)}{\sum_{i=1}^n q_i \Theta^{m_N} + \Theta^{m_{N-1}} (\Theta - 1) F_{m_{N-1}, k_{N-1}}}. \quad (14)$$

Отметим, что все свойства интереса группы к медиа-проекту при выполнении условия  $m_1 > I$  будут аналогичны свойствам интереса к медиа-проекту отдельного равномерно забывчивого робота с равноценными эмоциями (подробно эти свойства описаны в работе,

$$\Theta \approx \Theta_{m_1} = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} \frac{\sum_{j=1}^n \theta_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}}{m_1}.$$

Формулы, аналогичные соотношениям (12)–(14), можно получить при замене величины  $\Theta$  на значение  $\bar{\theta}_\infty$ , что также будет определять приближенную равномерную забывчивость группы роботов при большом значении тактов  $m_1$  непрерывного воспитания.

### Заключение

Таким образом, в настоящей статье показано, что при большом первоначальном количестве тактов непрерывного воспитания группы равномерно забывчивых роботов с равноценными эмоциями группу роботов можно считать равномерно забывчивой, и все свойства этой группы аналогичны свойствам отдельного робота.

### Список литературы

1. Пенский О.Г., Черников К.В. Основы математической теории эмоциональных роботов: моногр. Пермь: Перм. гос. ун-т. 2010. Текст парал. рус., англ. 270 с.
2. Пенский О.Г., Кузнецов А.Г., Ощепкова Н.В. Математическая модель и алгоритм накопления информации роботом с неабсолютной памятью // Вестник ЮУрГУ. Сер. Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2018. Т. 18, № 2. С. 142–148.
3. Пенский О.Г., Черников К.В. Математические модели психологических установок роботов // Искусственный интеллект и принятие решений. РАН. М., 2013, № 2. С. 28–32.
4. Пенский О.Г., Черников К.В. Основы математической теории эмоциональных роботов: моногр. Пермь: Перм. гос. ун-т. 2010. Текст парал. рус., англ. 270 с.
5. Pensky O.G., Sharapov Y.A., Chernikov K.V. Mathematical Models of Emotional Robots with a Non-Absolute Memory // Intelligent Control and Automation. USA. 2013. Vol. 4. № 2. P. 37–42.
6. Pensky O.G., Mihailov V.O., Chernikov K.V. Mathematical Models of Receptivity of a Robot and a Human to Education // Intelligent Control and Automations. USA. 2014. Vol. 5, № 3. P. 25–29.
7. Пенский О.Г., Шаронов Ю.А., Ощепкова Н.В. Математические модели роботов с неабсолютной памятью и приложения моделей: моногр. Пермь: Изд-во ПермГУ. 2018. 310 с.

## The study of the mathematical model of a group of robots' upbringing

**N. V. Oschepkova**

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia  
nvo@psu.ru; 8-342-239-63-09

The article formulates theorems describing the characteristics of upbringing of a group of robots being digital twins, introduces coefficients of the group memory of robots, and studies the properties of these coefficients. It is shown that with a large number of cycles of continuous upbringing of uniformly forgetful robots with equivalent emotions, the group will also possess the qualities of uniform forgetfulness.

**Keywords:** robot; digital twins memory; upbringing; groups of robots.